

Problème 1 : Genèse d'un coup de foudre

Le processus de formation des nuages dans l'atmosphère suit un ensemble complexe d'étapes dont la connaissance est à la base de la météorologie. Le cumulonimbus est le stade ultime du nuage formé dans un courant d'air chaud ascendant en contact avec un air froid et sec. Son profil en forme d'enclume, dont le sommet atteint le haut de la troposphère, et sa taille colossale sont caractéristiques et annonciateurs d'un orage imminent. On se propose de modéliser la répartition des charges électriques dans le nuage et de comprendre l'apparition de la foudre.

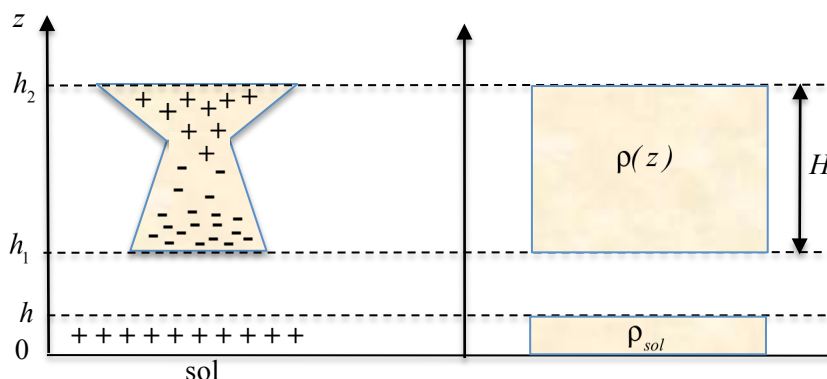


Les mécanismes de séparation des charges électriques au sein du nuage ne sont pas encore parfaitement compris, mais on constate habituellement l'apparition de charges négatives à la base du nuage et de charges positives au sommet. Dans certains cas, il peut même exister plusieurs zones chargées alternativement négativement et positivement. La base chargée du nuage fait alors apparaître, par influence et ionisation de l'air, des charges positives dans l'atmosphère sur une hauteur $h = 500\text{m}$ au voisinage du sol. Des mesures effectuées par ballon sonde permettent de déterminer la valeur de la composante verticale du champ électrique dans l'atmosphère : environ $65\text{ kV}\cdot\text{m}^{-1}$ à 500 m d'altitude et jusqu'à $200\text{ kV}\cdot\text{m}^{-1}$ de valeur maximale à l'intérieur du nuage.

On considère un nuage typique situé entre les altitudes $h_1 = 2\text{ km}$ et $h_2 = 10\text{ km}$, hauteur de la troposphère, de hauteur $H = h_2 - h_1 = 8\text{ km}$ et de section horizontale $S = 1\text{ km}^2$.

On rappelle la permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$.

Dans la modélisation proposée, on néglige tout effet de bord et on suppose donc que les grandeurs étudiées ne dépendent que de l'altitude z , comme indique sur le schéma ci-après.



Les charges positives près du sol sont réparties avec la densité volumique de charges uniforme ρ_{sol} . Le champ électrique est supposé nul en $z = 0$. A l'intérieur du nuage, on considère simplement que la densité volumique de charges $\rho(z)$ varie linéairement de la valeur maximale $\rho_0 > 0$ en $z = h_2$ à la valeur opposée $-\rho_0$ en $z = h_1$.

- 1) Montrer qu'en tout point M de l'espace, le champ électrique peut se mettre sous la forme : $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$
- 2) Déterminer le champ électrique $E(z)$ dans la zone chargée $0 < z < h$ au niveau du sol. En déduire la valeur numérique de la densité volumique de charges ρ_{sol} , ainsi que la charge totale Q_{sol} existant dans cette zone.
- 3) Montrer que le champ électrique dans la zone $h < z < h_1$ est uniforme et donner sa valeur.
- 4) Etablir l'expression de la densité volumique de charges $\rho(z)$ à l'intérieur du nuage.
- 5) Montrer que le champ électrique dans le nuage s'écrit : $E(z) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 H} \left(z^2 - (h_1 + h_2)z \right) + \frac{1}{\epsilon_0} \left(\rho_{sol} h + \rho_0 \frac{h_1 h_2}{H} \right)$
- 6) Représenter l'allure de $E(z)$ en fonction de l'altitude z .
- 7) Exprimer la valeur numérique de ρ_0 , ainsi que les charges totales $-Q$ et $+Q$ portées respectivement par les moitiés inférieures et supérieures du nuage. On pourra introduire $h_{moy} = \frac{h_1 + h_2}{2}$. Commenter.
- 8) Exprimer le potentiel électrostatique $V(z)$ dans le domaine sous le nuage, et dans le nuage. On prendra $V(z=0) = 0$. En déduire la différence de potentiel U entre le sol et la base du nuage. Commenter, en comparant par exemple à des tensions industrielles.

La foudre est une décharge électrique entre le nuage et le sol (parfois même entre deux nuages) permettant de neutraliser les charges accumulées. Lorsque le champ électrique atteint localement la valeur $E_{dis} = 10 \text{ kV.cm}^{-1}$ appelé champ disruptif, l'air est ionisé et un courant électrique devient possible dans l'air devenu conducteur : la décharge est à craindre.

- 9) On rappelle la valeur du champ disruptif de l'air : $E_{dis} = 10 \text{ kV.cm}^{-1}$, et comparer à la valeur du champ électrique obtenu précédemment. Commenter.

On constate que la foudre tombe préférentiellement sur des objets pointus, comme les arbres, les clochers, et les paratonnerres. Pour illustrer cet effet de pointe, on propose la modélisation suivante. Un objet pointu situé à l'altitude z est modélisé par une petite sphère de rayon R , de charge q , et porté au potentiel $V(z)$ supposé uniforme dans la sphère. On ne considère ici que l'action de la sphère sur son environnement immédiat. Soit un point M situé à la distance $r > R$ du centre O de la sphère.

- 10) Rappeler l'expression du champ électrique \vec{E} et du potentiel électrostatique créés en M par la sphère chargée. En déduire la relation entre la norme E du champ électrique créé au voisinage immédiat de la sphère et le potentiel $V(z)$ de celle-ci.
- 11) Déterminer le rayon de la sphère permettant l'ionisation de l'air à sa surface. Faire l'application numérique pour $z = 2 \text{ m}$ et $z = 10 \text{ m}$. Commenter. Quel est le principe d'un paratonnerre ?
- 12) Pourquoi dit-on qu'en l'absence d'obstacles, il vaut mieux s'allonger par terre et attendre que l'orage passe plutôt que de rester debout ? A quelle altitude l'air pourrait-il être ionisé au bout des doigts ? Il apparaît alors un courant ionique et des effluves lumineux dus à la recombinaison des ions. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet corona.

Lorsque la foudre tombe, la décharge électrique ne dure que quelques centaines de microsecondes et libère une énorme quantité d'énergie dans l'atmosphère.

- 13) Evaluer l'intensité du courant électrique de la décharge.
- 14) Déduire des résultats précédents l'énergie libérée par la foudre. Quelle serait l'augmentation de température de l'air à son voisinage, *ie* dans un tube de l'ordre de 10 cm de rayon ?
- 15) Expliquer succinctement quelle peut être l'origine du tonnerre ? Comment peut-on estimer la distance d'un orage grâce aux éclairs et le tonnerre ?

Problème 2 : Anneau de stockage pour molécules polaires

Le problème analyse le principe du piégeage dans une région restreinte de l'espace de molécules CH_3F qui possèdent un moment dipolaire électrique, en utilisant l'interaction avec un champ électrostatique inhomogène. De tels pièges permettent l'étude des collisions moléculaires ainsi que la construction de faisceaux moléculaires utilisés en nanolithographie et pour la réalisation de dépôts de surface.

On donne la valeur de la permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

I Hexapôle électrostatique

On étudie la possibilité de guider le mouvement de molécules polaires avec un système électrostatique formé de six électrodes cylindriques et parallèles ($C_i, i = 1, 2, \dots, 6$) disposées aux sommets d'un hexagone régulier auquel elles sont orthogonales (figure 1).

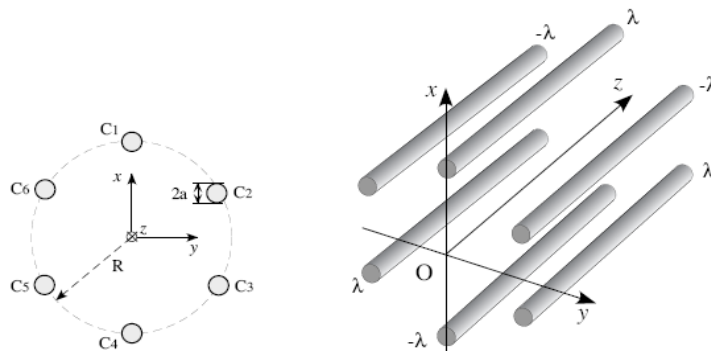


Figure 1

Leur rayon a est très inférieur au côté R de l'hexagone, $a \ll R$. Elles portent des densités linéiques de charge égales alternativement à λ ($\lambda > 0$) pour les électrodes numérotées impaires et $-\lambda$ pour les paires ; on considèrera que ces charges sont fixes et uniformément réparties à leur surface. On négligera les effets d'extrémités, ce qui revient à considérer les électrodes comme infiniment longues. On utilisera un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec comme repère orthonormé $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

- 1) Soit une électrode de densité linéique de charge λ . Déterminer le champ électrostatique créé par cette électrode en un point P à l'aide de la distance D de ce point à son axe ($D > a$). En déduire une expression du potentiel électrostatique correspondant.
- 2) Analyse des symétries de l'ensemble des 6 électrodes.
 - a) Quelles conclusions sur le champ \vec{E} et le potentiel électrostatique V tire-t-on du fait que l'on néglige les effets d'extrémités ?
 - b) Que peut-on dire de l'un quelconques des trois plans $P_{i,i+3}$ passant par l'axe central et les axes de deux électrodes opposées ? En déduire une conséquence pour le champ \vec{E}
 - c) Montrer que les trois plans passant par l'axe et à égale distance des électrodes sont équipotentiels.
 - d) Quelle est la période angulaire d'invariance du système par rotation autour de l'axe Oz ? En déduire une expression générale du potentiel $V(r, \theta, z)$ sous forme d'une série.

- 3) On considère maintenant l'ensemble des électrodes du système. Montrer que le potentiel électrostatique

$$\text{en un point } P \text{ est donné par l'expression : } V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln} \left(\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5} \right)$$

où D_i désigne la distance de P à l'axe de l'électrode C_i , à condition de choisir le potentiel nul en un point que l'on précisera.

- 4) Déterminer le potentiel V_{impair} à la surface des électrodes impaires en fonction de R , a et λ . Compte tenu de l'hypothèse $a \ll R$, ce potentiel sera appelé potentiel de l'électrode et noté V_0 . Quel est de même le potentiel V_{pair} des électrodes paires ?

5) On s'intéresse à la partie centrale $r \ll R$. On peut établir (calcul non demandé) que le potentiel

électrostatique y est donné par : $V(r, \theta, z) \approx \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \left(\frac{r}{R} \right)^3 \cos 3\theta$ avec θ mesuré à partir de l'axe polaire Ox

passant par C_1 . Cette expression respecte-t-elle les symétries étudiées en question 1) ?

6) On considère le système comme un condensateur, les trois électrodes impaires formant l'une des armatures, les trois paires l'autre. Déterminer la charge totale par unité de longueur de chacune des armatures, puis en déduire la capacité par unité de longueur correspondante C de ce condensateur. Application numérique. Calculer la valeur numérique de la capacité électrostatique par unité de longueur d'un hexapôle ayant $R = 2,5$ cm et $a = 2,5$ mm.

Montrer que le potentiel électrostatique dans la partie centrale de l'hexapôle s'exprime simplement en fonction de cette capacité linéique et du potentiel V_0 . Quel est l'intérêt pratique de cette nouvelle expression ?

II Mouvement de molécules polaires dans un hexapôle électrostatique

Dans cette partie, on analyse le mouvement des molécules, possédant un moment dipolaire permanent \vec{p}_0 , dans le champ électrique de l'hexapôle électrostatique étudié en partie I. On négligera le dipôle induit. Dans le vide, les molécules, libres de tourner, ont un mouvement de rotation ; l'énergie et le moment cinétique correspondant sont quantifiés.

Seul compte, pour le couplage avec le champ électrique, la projection $p_{eff} = \vec{p}_0 \cdot \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|}$ du moment dipolaire sur la direction du champ électrique ; p_{eff} est une constante positive, négative ou nulle, donnée pour chaque état moléculaire.

7) On rappelle l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle rigide \vec{p} dans un champ électrostatique \vec{E} :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \text{ Exprimer } E_p \text{ à l'aide de } p_{eff}.$$

8) Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(r, \theta, z)$ créé par l'hexapôle en coordonnées polaires dans la partie centrale de l'hexapôle. Expliciter l'expression de l'énergie potentielle puis celle de la force exercée par l'hexapôle électrostatique sur une molécule en fonction de son moment dipolaire effectif p_{eff} .

9) Montrer que l'équation différentielle régissant le mouvement d'une molécule de masse m dans le champ hexapolaire peut être périodique, à une condition portant sur le signe de p_{eff} , et que l'on précisera.

Quelle est alors la pulsation ω_0 correspondante ?

On suppose que la molécule avait à un instant initial une vitesse quelconque. Décrire le mouvement dès lors que le champ électrostatique est appliqué ?

10) On suppose que p_{eff} a un signe différent de celui de la question précédente qui assurait un mouvement périodique. Décrire rapidement mais en argumentant cet autre comportement de la molécule. Le mouvement de la molécule est-il confiné ?

11) Résoudre complètement l'équation différentielle correspondant au mouvement périodique pour une molécule située à l'instant $t = 0$ sur l'axe central et ayant une vitesse initiale :

$$\vec{v}(t = 0) = v_{0x} \vec{e}_x + v_{0y} \vec{e}_y + v_{0z} \vec{e}_z$$

Un jet moléculaire effusif est généré à partir d'une enceinte contenant CH_3F gazeux, à température T , munie d'un orifice de sortie à l'origine de l'axe Oz . Le jet est collimaté par un diaphragme de petit diamètre donnant pour direction moyenne du jet celle de l'axe central Oz de l'hexapôle.

12) Montrer que l'hexapôle permet de refocaliser les molécules, en opérant une sélection selon le moment dipolaire. Préciser la distance de première refocalisation.

31 janvier 2015

Problème 1 : Genèse d'un coup de foudre

1) La distribution de charges est invariante par translation parallèlement aux axes Ox et Oy : d'après le principe de Curie, il en est de même pour le champ \vec{E} qui ne dépend que de z .
 Tout plan vertical passant par M est plan de symétrie pour la distribution de charges. Le champ électrique appartient à tous ces plans, \vec{E} est colinéaire à \vec{u}_z . On obtient $\boxed{\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z}$ **1 pts**

2) On applique le théorème de Gauss avec une surface fermée cylindrique de section S quelconque et compris

$$\text{entre les cotes } z=0 \text{ et } z < h : \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S(0)} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S(z)} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{lat}} E(z)\vec{u}_z \cdot dS\vec{u}_r = 0 \quad \text{et} \quad \iint_{S(0)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S(0)} \vec{E}(0) \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\text{Il reste} \quad \iint_{S(z)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S(z)} E(z)\vec{u}_z \cdot dS\vec{u}_z = \iint_{S(z)} E(z) \cdot dS = E(z)S \quad \mathbf{1 pts} \quad \text{et par ailleurs,} \quad \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{sol}Sz}{\epsilon_0}$$

$$\text{On obtient} \quad \boxed{E(z) = \frac{\rho_{sol}z}{\epsilon_0}} \quad \mathbf{1 pts}$$

$$\text{On connaît la valeur de ce champ en } h : E(h) = 65 \text{ kV.m}^{-1} \quad \text{donc} \quad \boxed{\rho_{sol} = \frac{\epsilon_0 E(h)}{h} = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ C.m}^{-3}} \quad \mathbf{1 pts}$$

$$\text{La couche d'épaisseur } h \text{ près du sol contient la charge } Q_{sol} = \rho_{sol}Sh \text{ soit} \quad \boxed{Q = 0,58 \text{ C}} \quad \mathbf{1 pts}$$

3) Dans le domaine $h < z < h_1$, $\rho = 0$. L'équation de Maxwell Gauss s'écrit : $\text{div}\vec{E} = 0$ soit $\frac{dE(z)}{dz} = 0$
 d'où $\boxed{E(z) = cte = E(h) = 65 \text{ kV.m}^{-1}}$ **1 pts**

4) La densité volumique de charges varie linéairement dans le nuage : $\rho(z) = Az + B$ avec $\rho(h_1) = -\rho_0$

$$\text{et } \rho(h_2) = \rho_0. \text{ Il vient} \quad \begin{cases} -\rho_0 = Ah_1 + B \\ \rho_0 = Ah_2 + B \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{\rho(z) = \frac{\rho_0}{H}(2z - h_1 - h_2)} \quad \mathbf{1 pts}$$

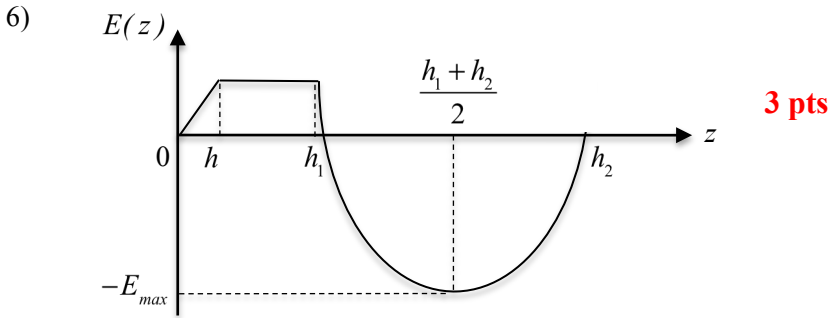
5) On écrit l'équation de Maxwell Gauss dans le nuage **1 pts** : $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ soit $\frac{dE(z)}{dz} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 H}(2z - (h_1 + h_2))$

$$\text{On intègre : } E(z) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 H}(z^2 - (h_1 + h_2)z) + cte \quad \mathbf{1 pts}$$

Le champ étant continu pour une distribution volumique de charges, on détermine la constante en $z = h_1$

$$\text{où le champ vaut } E(h_1) = E(h) = \frac{\rho_{sol}h}{\epsilon_0} : \frac{\rho_{sol}h_1}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 H}(h_1^2 - (h_1 + h_2)h_1) + cte \quad \text{soit} \quad cte = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\rho_{sol}h + \rho_0 \frac{h_1 h_2}{H} \right)$$

$$\text{On obtient finalement l'expression proposée} \quad \boxed{E(z) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 H}(z^2 - (h_1 + h_2)z) + \frac{1}{\epsilon_0} \left(\rho_{sol}h + \rho_0 \frac{h_1 h_2}{H} \right)} \quad \mathbf{1 pts}$$



7) L'énoncé donne la valeur du champ électrique maximal à l'intérieur du nuage, situé d'après l'étude précédente en $h_{moy} = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ soit $E(h_{moy}) = -E_{max} = -200 \text{ kV.m}^{-1}$.

$$-E_{max} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 H} \left(h_{moy}^2 - (2h_{moy})h_{moy} \right) + \frac{1}{\epsilon_0} \left(\rho_{sol} h + \rho_0 \frac{h_1 h_2}{H} \right) \quad \text{bon, il y a un peu de calcul..}$$

$$-E_{max} = \frac{-\rho_0 h_{moy}^2}{\epsilon_0 H} + \frac{1}{\epsilon_0} \left(\rho_{sol} h + \rho_0 \frac{h_1 h_2}{H} \right) \quad \text{soit } E_{max} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 H} (h_{moy}^2 - h_1 h_2) - \frac{\rho_{sol} h}{\epsilon_0}$$

$$h_{moy}^2 - h_1 h_2 = \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right)^2 - h_1 h_2 = \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_2^2}{4} + \frac{1}{2} h_1 h_2 - h_1 h_2 = \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_2^2}{4} - \frac{1}{2} h_1 h_2 = \left(\frac{h_2 - h_1}{2} \right)^2 = \frac{H^2}{4}$$

$$E_{max} = \frac{\rho_0 H}{4\epsilon_0} - \frac{\rho_{sol} h}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \boxed{\rho_0 = \frac{4}{H} (\epsilon_0 E_{max} + \rho_{sol} h)} \quad \mathbf{3 \text{ pts}} \quad \text{AN : } \boxed{\rho_0 = 1,2 \cdot 10^{-9} \text{ C.m}^{-3}} \quad \mathbf{1 \text{ pts}}$$

Pour calculer la charge totale portée par chaque moitié de nuage, on écrit : $Q = \int_{h_{moy}}^{h_2} \rho(z) S dz = - \int_{h_1}^{h_{moy}} \rho(z) S dz$

$$\text{soit } Q = \int_{h_{moy}}^{h_2} \frac{2\rho_0}{H} (z - h_{moy}) S dz = \frac{2\rho_0 S}{H} \left[\frac{z^2}{2} - h_{moy} z \right]_{h_{moy}}^{h_2} = \frac{2\rho_0 S}{H} \left(\frac{h_2^2}{2} - h_{moy} h_2 - \frac{h_{moy}^2}{2} + h_{moy}^2 \right)$$

$$\text{On simplifie : } Q = \frac{2\rho_0 S}{H} \left(\frac{h_2^2}{2} - h_{moy} h_2 + \frac{h_{moy}^2}{2} \right) = \frac{\rho_0 S}{H} (h_2 - h_{moy})^2 = \frac{\rho_0 S}{H} \left(\frac{h_2 - h_1}{2} \right)^2 = \frac{\rho_0 S}{H} \left(\frac{H}{2} \right)^2 = \frac{\rho_0 S H}{4}$$

$$\text{Finalement : } \boxed{Q = \frac{\rho_0 S H}{4}} \quad \mathbf{3 \text{ pts}} \quad \text{AN : } \boxed{Q = 2,4 \text{ C}} \quad \mathbf{1 \text{ pts}}$$

Un condensateur de $1 \mu\text{F}$ (gros condensateur de TP) soumis à une tension de 100 V porte une charge $Q = 10^{-4} \text{ C}$ **1 pts** ; la charge du nuage est énorme. **1 pts**

8) On détermine le potentiel dans chaque domaine en intégrant la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$ soit ici $E(z) = -\frac{dV}{dz}$

$$\text{Pour } 0 < z < h, \quad -\frac{dV}{dz} = \frac{\rho_{sol} z}{\epsilon_0} \quad \text{soit } \boxed{V(z) = -\frac{\rho_{sol} z^2}{2\epsilon_0}} \quad \mathbf{1 \text{ pts}} \quad \text{puisque } V(0) = 0$$

$$\text{Pour } h < z < h_1, \quad -\frac{dV}{dz} = \frac{\rho_{sol} h}{\epsilon_0} \quad \text{soit } V(z) = -\frac{\rho_{sol} h}{\epsilon_0} z + cte \quad \text{et on détermine la constante par continuité}$$

$$\text{en } z = h : V(h) = -\frac{\rho_{sol} h^2}{2\epsilon_0} = -\frac{\rho_{sol} h^2}{\epsilon_0} + cte \quad \text{donc } cte = \frac{\rho_{sol} h^2}{2\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \boxed{V(z) = \frac{\rho_{sol} h}{2\epsilon_0} (h - 2z)} \quad \mathbf{1 \text{ pts}}$$

$$\text{La différence de potentiel entre le sol et le nuage vaut : } \boxed{U = V(h_1) - V(0) = \frac{\rho_{sol} h}{2\epsilon_0} (h - 2h_1)} \quad \mathbf{1 \text{ pts}}$$

$$\text{AN : } \boxed{U = -1,1 \cdot 10^8 \text{ V}} \quad \mathbf{1 \text{ pts}}$$

Les plus grandes tensions utilisées pour le transport du courant sont actuellement de l'ordre de 1000 kV . Il existe des projets pour des lignes à 1500 kV ; cette tension entre le sol et le nuage est deux ordres de grandeur plus importante. **1 pts**

9) Le champ disruptif de l'air humide est de l'ordre de $E_{dis} = 1000 \text{ kV.m}^{-1}$. Le champ électrique maximal est obtenu à l'intérieur du nuage et vaut $E_{max} = 200 \text{ kV.m}^{-1}$. Près du sol, il vaut 65 kV.m^{-1} .

A priori, ces champs sont insuffisants pour ioniser l'air et provoquer une décharge. **1 pts**

10) Le champ et le potentiel électriques à l'extérieur de la sphère chargée sont identiques à ceux produit par la même charge concentrée au centre de la sphère : $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ **1 pts** et $V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ **1 pts**

avec $V(\infty) = 0$. On en déduit $E(r \approx R) = \frac{|V(z)|}{R}$ **1 pts**

11) Pour ioniser l'air, le champ électrique près de la surface doit atteindre le champ disruptif E_{dis} .

On en déduit le rayon de la sphère correspondante. $R = \frac{|V(z)|}{E_{dis}} = \frac{\rho_{sol}}{2\epsilon_0 E_{dis}} z^2$ **1 pts**

AN : Pour $z = 2 \text{ m}$, $R = 0,26 \text{ mm}$ **1 pts** et pour $z = 10 \text{ m}$, $R = 6,5 \text{ mm}$

Plus on monte en altitude, moins les obstacles ont besoin d'être pointus pour ioniser l'air. **1 pts**

Les paratonnerres, tiges pointues et placées en hauteur, provoquent l'ionisation de l'air et l'éclair, mais sont reliées à la terre, et conduisent ce courant dans le sol. **1 pts** Ils devraient plutôt s'appeler des parafoudres.

12) En restant debout, le corps déforme les lignes de champ électrique qui se resserrent pour contourner l'obstacle. **1 pts** Le champ devient plus intense, ce qui est plus propice à une décharge. Cet effet est plus marqué en altitude, **1 pts** en montagne par exemple. En restant près du sol, et allongé, le risque est moindre. En estimant la largeur des doigts à 2 cm, soit un rayon de courbure de $R = 1 \text{ cm}$, l'ionisation de l'air peut

être provoquée aux bouts des doigts écartés pour une altitude z donnée par $z = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 E_{dis} R}{\rho_{sol}}}$ soit $z = 12 \text{ m}$. **2 pts**

En randonnant en montagne, vous pouvez avoir l'occasion de vivre (avec modération quand même !) ce phénomène, avec l'apparition d'effluves lumineuses au bouts des doigts ou même sur la tête.

13) L'intensité du courant de décharge est donnée en ordre de grandeur par $I \approx \frac{Q}{\Delta t}$ avec $\Delta t \approx 5.10^{-4} \text{ s}$

« quelques centaines de microsecondes »

AN : $I = 4800 \text{ A}$; on peut retenir un courant de l'ordre de plusieurs milliers d'ampères. **1 pts**

14) On peut estimer l'énergie libérée par la relation $W = UI\Delta t$, avec $U = 1,1.10^8 \text{ V}$, $I = 4800 \text{ A}$ et $\Delta t \approx 5.10^{-4} \text{ s}$

$W = 2,6.10^8 \text{ J}$ **1 pts**

Considérons que cette énergie sert à élever la température de l'air contenu dans un cylindre de hauteur h_1 (altitude entre le sol et le nuage), de rayon 10 cm (à proximité immédiate de l'éclair).

Ce domaine contient $n = \frac{P_0 V}{RT_0} = \frac{P_0 \pi r^2 h_1}{RT_0} = 2,6.10^3 \text{ mol}$. **1 pts**

En utilisant le premier principe à pression atmosphérique constante, $\Delta H = nC_p \Delta T = W$ **1 pts**

soit $\Delta T \approx 3400 \text{ K}$! **1 pts**

15) Cette élévation très importante et brutale de la température provoque une dilatation de l'air et la création d'une onde de choc **1 pts**, onde sonore très intense : le tonnerre.

L'éclair, onde lumineuse, est perçue instantanément. Le tonnerre, onde sonore, se propage à la célérité d'environ 340 m.s^{-1} . Cette onde sonore met environ 3 s pour parcourir 1 km. Pour connaître la distance à laquelle se trouve un orage, il suffit de compter les secondes séparant la perception de l'éclair et du tonnerre, et de diviser ce nombre par 3 pour obtenir la distance en km. **3 pts**

Problème 2 : Anneau de stockage pour molécules polaires

I Hexapôle électrostatique

1) Par invariance de la distribution de charges en translation selon z et en rotation selon θ , $\vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r)$

En tout point P on peut faire passer un plan de symétrie diamétral et un autre de section droite $\vec{E} = E \vec{e}_r$

On a donc $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$ **1 pts**

On applique le théorème de Gauss en choisissant une surface fermée cylindrique d'axe confondu avec celui de l'électrode, de rayon $r > a$ et de longueur L .

$$\oiint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad \oiint_S \vec{E} d\vec{S} = \iint_{S_{lat}} E(r) \vec{e}_r dS \vec{e}_r = \iint_{S_{lat}} E(r) dS = E(r) \iint_{S_{lat}} dS = 2\pi r L E(r) \quad \text{et} \quad Q_{int} = \lambda L$$

soit $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ et à la distance $r = D$ $\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 D} \vec{e}_r$ **1 pts**

On détermine V en écrivant : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ soit $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$. On a $dV = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r}$

et $V(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln D + cte$ **1 pts**

2) Analyse des symétries

a) D'après le principe de Curie, la distribution de charges étant invariante par translation selon z ,

les champs \vec{E} et V sont indépendants de z . **1 pts**

Par ailleurs, tout plan perpendiculaire à l'axe de l'hexapôle est un plan de symétrie. En tout point d'un plan de symétrie, le champ est contenu dans ce plan : \vec{E} n'a pas de composante selon \vec{e}_z **1 pts**

b) L'un quelconques des trois plans $P_{i,j+3}$ passant par l'axe central et les axes de deux électrodes opposées est un plan de symétrie électrique, donc un plan de symétrie pour \vec{E} . **1 pts** En tout point de ces plans $P_{i,j+3}$, \vec{E} est contenu dans ce plan. Par ailleurs, \vec{E} n'a pas de composante selon z .

En tout point d'un plan $P_{i,j+3}$, \vec{E} est porté par la direction $\overrightarrow{C_i C_{i+3}}$ **1 pts** passant par les deux électrodes.

c) Ces trois plans sont des plans de symétrie géométriques, mais de part et d'autres les charges sont opposées : ce sont des plans d'antisymétrie électrique. Le champ \vec{E} sur ces plans leur est normal. Les champs électriques étant toujours normaux aux équipotentiels, on en déduit que les trois plans d'antisymétrie sont des plans équipotentiels. **1 pts**

d) La période angulaire recherchée est le plus petit angle qui renvoie un rayon d'une électrode paire (resp impaire) sur une autre électrode paire (resp impaire). La période angulaire vaut $2\pi/3$ **1 pts**

Le potentiel est donc périodique et peut être développé en série de Fourier, avec des termes de la forme

$$\cos\left(n2\pi\frac{\theta}{T} + \varphi_n\right) \quad \text{où} \quad T = \frac{2\pi}{3}, \quad \text{soit} \quad \cos(n3\theta + \varphi_n) : \quad V(r, \theta, z) = V(r, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(r) \cos(3n\theta + \varphi_n) \quad \text{2 pts}$$

3) En appliquant le principe de superposition,

$$V(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln D_1 + \ln D_3 + \ln D_5) - \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln D_2 + \ln D_4 + \ln D_6) + cte' = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5} \right) + cte'$$

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5} \right) + cte' \quad \text{1 pts}$$

Si P est sur l'axe central, les D_i sont égaux et $V(P_{axe}) = +cte' = 0$ par hypothèse. Il reste bien

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5} \right) \quad \text{1 pts}$$

4) Les électrodes impaires portent une charge linéique $\lambda > 0$: $V(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln} D + cte$

En calculant le potentiel sur l'axe z , $0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln} R + cte$ soit $V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln}\left(\frac{R}{r}\right)$

On en déduit le potentiel à la surface de l'électrode : $V(D=a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln}\left(\frac{R}{a}\right)$.

On a donc $V_{\text{impaire}} = V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln}\left(\frac{R}{a}\right)$ **1 pts** et immédiatement $V_{\text{pair}} = -V_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln}\left(\frac{R}{a}\right)$ **1 pts**

5) Le potentiel $V(r, \theta, z) \approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{r}{R}\right)^3 \cos 3\theta$ permet de calculer le champ électrique correspondant :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \text{ soit } \vec{E} = -\frac{3\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3} (\cos(3\theta)\vec{e}_r - \sin(3\theta)\vec{e}_\theta) \quad \mathbf{1 \text{ pts}}$$

- V et \vec{E} sont indépendants du paramètre z , **1 pts**

- \vec{E} n'a pas de composantes en \vec{e}_z **1 pts**

- V est invariant par rotation d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$: $\cos\left(3\left(\theta + n\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \cos(3\theta + n2\pi) = \cos(3\theta)$ **1 pts**

- Les plans passant par l'axe central et équidistants des autres électrodes correspondent à $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \text{ et } \frac{5\pi}{6}$.

Pour ces valeurs, $\cos 3\theta$ s'annule. Ces plans sont bien des plans équipotentiels (nuls). **1 pts**

- Le plan $\theta = 0$ passant par C_1 et C_4 est plan de symétrie car $V(\theta) = V(-\theta)$ et $\begin{cases} E_r(r, \theta) = E_r(r, -\theta) \\ E_\theta(r, \theta) = -E_\theta(r, -\theta) \end{cases}$

donc $\vec{E}(r, -\theta) = \text{Sym}_{\theta=0}(\vec{E}(r, \theta))$. **1 pts**

L'invariance par rotation d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$ permet de dire qu'il en est de même pour les plans C_2C_5 et C_3C_6 **1 pts**

6) La charge totale par unité de longueur portée par les trois électrodes paires est -3λ , et par les trois électrodes impaires, $+3\lambda$. La différence de potentiel entre les deux armatures est $V_0 - (-V_0) = 2V_0$

On en déduit la capacité par unité de longueur : $C = \frac{3\lambda_0}{2V_0} = \frac{3\pi\epsilon_0}{\text{Ln}\left(\frac{R}{a}\right)}$ **2 pts** AN : $C = 36 \text{ pF.m}^{-1}$ **1 pts**

On peut exprimer $V(r, \theta, z) \approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{r}{R}\right)^3 \cos 3\theta$ sous la forme : $V(r, \theta, z) \approx \frac{2V_0 C}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{r}{R}\right)^3 \cos 3\theta$ **1 pts**

Cette expression du potentiel fait intervenir des grandeurs plus faciles à contrôler expérimentalement, en particulier en remplaçant λ par C . **1 pts**

II Mouvement de molécules polaires dans un hexapôle électrostatique

7) L'énergie potentielle du dipôle rigide \vec{p} dans le champ \vec{E} est : $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p_{\text{eff}} |\vec{E}|$ **1 pts**

8) Le champ électrique dans la partie centrale de l'hexapôle a été calculé à la question 5) :

$\vec{E} = -\frac{3\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3} (\cos(3\theta)\vec{e}_r - \sin(3\theta)\vec{e}_\theta)$. On en déduit $|\vec{E}| = \frac{3\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3}$ **1 pts** et $E_p = -p_{\text{eff}} \frac{3\lambda r^2}{\pi\epsilon_0 R^3}$ **1 pts**

La force exercée sur une molécule est donnée par $\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ soit $\vec{f} = -\frac{dE_p}{dr} \vec{e}_r$: $\vec{f} = p_{\text{eff}} \frac{6\lambda r}{\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r$ **1 pts**

- 9) On applique la relation fondamentale de la dynamique à la molécule soumise à la seule force dérivant du champ hexapolaire, dans le référentiel supposé galiléen du dispositif. On fait donc l'hypothèse habituelle et légitime de négliger le poids de la molécule devant les forces électrostatiques mises en jeu.

$$m\vec{a}(M) = \vec{f} \text{ soit en projection sur la direction radiale : } m \frac{d^2 r}{dt^2} = p_{eff} \frac{6\lambda}{\pi\epsilon_0 R^3} r \text{ et } \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{6\lambda p_{eff}}{m\pi\epsilon_0 R^3} r = 0 \text{ 1 pts}$$

On a bien l'équation d'un oscillateur harmonique si p_{eff} est négatif **1 pts** de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{-6\lambda p_{eff}}{m\pi\epsilon_0 R^3}}$ **1 pts**

Une molécule ayant initialement une vitesse quelconque va conserver les composantes orthoradiales et axiales de sa vitesse initiale, la force \vec{f} étant uniquement radiale. **1 pts**

La trajectoire sera donc une hélice à base elliptique décrite avec des vitesses orthoradiales et axiales constantes. **1 pts**

- 10) Si $p_{eff} > 0$, l'équation admet des solutions de la forme $r = A \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) + B \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ **1 pts** avec $\tau = \sqrt{\frac{m\pi\epsilon_0 R^3}{6\lambda p_{eff}}}$

En notant r_0 et \dot{r}_0 les composantes radiales de la vitesse initiale, $r_0 = A + B$ et $\dot{r}_0 = \frac{A}{\tau} - \frac{B}{\tau}$

$$\text{soit } r(t) = \frac{1}{2}(r_0 + \tau\dot{r}_0) \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) + \frac{1}{2}(r_0 - \tau\dot{r}_0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ 2 pts}$$

Si $r_0 + \tau\dot{r}_0 = 0$, la molécule se rapproche exponentiellement du centre de l'hexagone. **1 pts** Sinon, elle s'en écarte et sort très vite de la partie centrale de l'hexapôle. **1 pts** Le premier régime est instable et cesse dès que l'égalité n'est plus exactement vérifiée. C'est le second régime qui prévaut alors.

Si $p_{eff} > 0$, le mouvement n'est pas confiné. **1 pts**

- 11) L'équation $\frac{d^2 r}{dt^2} + \omega_0^2 r = 0$ se résout en $\vec{r}(t) = \vec{A} \cos(\omega_0 t) + \vec{B} \sin(\omega_0 t)$ **1 pts**

$$\vec{r}(t=0) = \vec{A} = \vec{0} \text{ puisque sur l'axe central, } r=0, \text{ et } \vec{r}'(t=0) = \vec{B}\omega_0 = \vec{v}_{0x} + \vec{v}_{0y} \text{ soit } \vec{B} = \frac{\vec{v}_{0x} + \vec{v}_{0y}}{\omega_0}$$

On obtient $\vec{r}(t) = \frac{\vec{v}_{0x} + \vec{v}_{0y}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ **1 pts** et $\vec{z}(t) = v_{0z} t \vec{e}_z$ **1 pts** puisque le mouvement est uniforme selon z

Rq : la molécule étant initialement sur l'axe, sa vitesse orthoradiale initiale est nulle...et le reste.

- 12) Les molécules ayant un moment dipolaire effectif p_{eff} négatif oscillent autour de l'axe central tout en se propageant à vitesse constante le long de l'axe Oz. **1 pts** La première refocalisation correspond à la première annulation de $r(t)$ **1 pts** soit à $\sin(\omega_0 t) = 0$, qui se produit à l'instant $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi \sqrt{\frac{m\pi\epsilon_0 R^3}{6\lambda p_{eff}}}$ **1 pts**

La distance parcourue est $d_1 = v_{0z} t_1$ soit $d_1 = v_{0z} \pi \sqrt{\frac{m\pi\epsilon_0 R^3}{6\lambda p_{eff}}}$ **1 pts**